

ЗАВИСИМОСТЬ ПАРАМЕТРОВ СЖАТИЯ ПУЗЫРЬКА ОТ ФОРМЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ

А.А.Аганин, М.А.Ильгамов

*Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН
Казань, ул. Лобачевского, 2/31, aganin@dionis.kfti.knc.ru*

*Институт механики УНЦ РАН
Уфа, ул. К.Маркса, 12, корп.6, ilgamov@anrb.ru*

Рассматриваются колебания пузырька воздуха в центре сферического объема жидкости (воды). На внешней поверхности жидкой сферы действует периодически изменяющееся давление. Размеры пузырька малы по сравнению с длиной волны внешнего давления. Изучается зависимость величины и характера достижения максимальных значений температуры, плотности и давления в пузырьке от закона изменения внешнего давления на режимах с ударными волнами. Для моделирования динамики газа и жидкости используются уравнения газовой динамики с учетом теплопроводности среды и их приближения (гомобарическое приближение для газа в пузырьке, приближения малосжимаемой жидкости и линейной акустики для окружающей жидкости). Принятые уравнения состояния газа и жидкости соответствуют возникающим в задаче высоким уровням давлений и температур.

Введение. Обычно при изучении колебаний пузырька газа в жидкости закон изменения внешнего давления принимается гармоническим. В настоящей работе такой закон определяется решением нелинейного уравнения переноса в различные фиксированные моменты времени с использованием гармонического закона в качестве начальных данных. С течением времени решение нелинейного уравнения переноса все более уклоняется от начального распределения. В частности, в нем возникает разрыв, амплитуда которого сначала относительно быстро увеличивается, а затем постепенно уменьшается.

В большинстве работ уравнения газовой динамики применяются только для описания газа. Их использование для моделирования обеих сред было осуществлено в [1]. Второй подход требует значительно больше компьютерного времени, так как уравнения газовой динамики решаются численно. В [2–4] показано, что существенно повысить экономичность вычислений без ущерба для точности можно путем совместного применения уравнений газовой динамики и их приближений. В настоящей работе исполь-

зуется подход [2–4].

Кроме увеличения компьютерного времени применение уравнений газовой динамики для описания движения жидкости [1–4] требует знания уравнений состояния. В настоящей работе с этой целью используется уравнение состояния воды Нигматулина и Болотновой [5]. Ранее в [2] для этого применялось двухчленное уравнение, а в [1,3,4] – уравнение состояния воды Ree [6]. Уравнения состояния Нигматулина и Болотновой [5] и Ree [6] дают близкие результаты в широком диапазоне изменения плотности и температуры. Вместе с тем, уравнение состояния Нигматулина и Болотновой [5] является более удобным для применения.

Постановка задачи. В центре сферического объема жидкости, на внешней поверхности которого задано периодически изменяющееся давление, колеблется пузырек малых размеров по сравнению с длиной волны. Давление на внешней поверхности жидкого объема изменяется по закону

$$p_{ex}(t) = p_{ex}^0 - \Delta p_{ex} q(\omega t / \pi, \tau), \quad (1)$$

где Δp_{ex} , ω – амплитуда и частота колебаний, t – время, p_{ex}^0 – среднее значение давления, τ – параметр ($-1/2 \leq \tau \leq 1/2$), задающий форму колебаний давления. Функция $q(\xi, \tau)$ ($\xi = \omega t / \pi$) представляет собой решение нелинейного уравнения переноса

$$q_\tau + (q^2 / 2)_\xi = 0$$

с начальным распределением $q(\xi, 0) = \sin \pi \xi$. Решение $q(\xi, \tau)$ определяется из уравнения

$$q(\xi, \tau) = \sin \pi (\xi - q\tau).$$

Задаваемые с помощью функции $q(\xi, \tau)$ формы колебаний приведены на

рис. 1 для $\Delta p_{ex} = 1.35$ бар, $\omega = 2\pi(26.5 \text{ кГц})$, $\tau = -0.3, 0, 0.3$ (кривые 1–3).

Принимается, что жидкость находится в области $r_b \leq r \leq r_{ex}$, где r – пространственная координата, отсчитываемая от центра пузырька, $r_b = r_b(t)$ – радиус пузырька, $r_{ex} = r_{ex}(t)$, $r_b / r_{ex} \sim 0.1$, $\delta r_{ex} = r_{ex} \omega / (2\pi c_f^0) \ll 1$, c_f^0 – скорость звука в жидкости (верхний индекс 0 указывает на отношение пара-

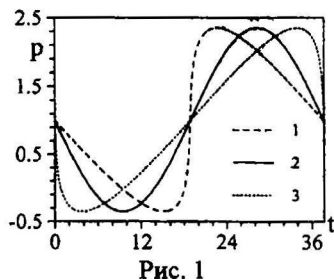


Рис. 1

метра к невозмущенному состоянию, а нижний индекс f – к жидкости). Поэтому давление на поверхности $r=r_{ex}$ подчиняется закону (1).

Для описания радиальных движений газа и жидкости используются уравнения газовой динамики с учетом теплопроводности

$$(\rho r^2)_t + (\rho r^2 u)_r = 0, \quad (\rho r^2 u)_t + (\rho r^2 + \rho r^2 u^2)_r = 0, \quad (2a, b)$$

$$(E r^2)_t + [r^2 (p + E) u]_r = -(r^2 W)_r, \quad W = -\kappa T_r. \quad (2c, d)$$

Здесь T – температура, $\epsilon = (E/\rho) - u^2/2$ – удельная внутренняя энергия, p – давление, ρ – плотность, u – скорость, E – удельная на единицу объема полная энергия, κ – коэффициент теплопроводности. Нижние индексы t и r означают частные производные.

Граничные условия задачи имеют вид

$$a) \quad r=0: u(0, t)=0, \quad T_r=0;$$

$$b) \quad r=r_b: u_b^- = u_b^+ = u_b, \quad T_b^- = T_b^+, \quad p_b^- = p_b^+ + 4\mu_f \frac{u_b}{r_b} + 2\frac{\sigma}{r_b}, \quad W_b^- = W_b^+;$$

$$c) \quad r=r_{ex}: p(r_{ex}, t) = p_{ex}(t), \quad T(r_{ex}, t) = T^0.$$

Здесь нижний индекс b означает отношение параметра к поверхности пузырька, знаки \pm указывают на отношение к поверхности со стороны газа $(-)$ и жидкости $(+)$, σ – коэффициент поверхностного натяжения, μ_f – коэффициент вязкости жидкости.

При $t=0$ полагается

$$u=0, \quad T=T^0, \quad p=p_g^0 = p_f^0 + 2(\sigma/r_b^0) \quad \text{при } 0 < r \leq r_b^0, \quad r_b^0 = r_b(0),$$

$$u=0, \quad T=T^0, \quad p=p_f^0 = p_{ex}^0 \quad \text{при } r_b^0 < r \leq r_{ex}^0, \quad r_{ex}^0 = r_{ex}(0).$$

Уравнения состояния. Для газа (воздуха) используются выражения

$$p=p_1 \quad \text{при } \rho \leq \rho_*, \quad p=p_1 + p_2 + p_3 \quad \text{при } \rho > \rho_*,$$

$$\epsilon = \epsilon_1 \quad \text{при } \rho \leq \rho_0, \quad \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad \text{при } \rho > \rho_0,$$

$$p_1 = \rho RT(1 + \nu_D)(1 + \nu), \quad p_2 = \frac{\epsilon_c \rho_0}{1 - (3/k)} \left[(\rho/\rho_0)^{\frac{k}{3}+1} - (\rho/\rho_0)^2 \right],$$

$$p_3 = -p_2(\rho_*),$$

$$\epsilon_1 = \left[\frac{5}{2} RT + \frac{R\Theta}{e^{\Theta/T} - 1} \right] (1 - \nu_D) + \nu_D RT_D + \frac{3}{2} RT(2\nu_D)(1 + \nu) +$$

$$2 v_D R \sum_{i=1}^5 v_i T_i, \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_c}{(k/3)-1} \left[(\rho/\rho_0)^{k/3} - \frac{k}{3} (\rho/\rho_0) \right] + \varepsilon_c, v = \sum_{i=1}^5 v_i,$$

$$v_i = 0.5 \left[\operatorname{th} (7 T_i^{-1} - 6.3) + \operatorname{th} 6.3 \right], \rho_* = \rho_0 (6/(k+3))^{3/(k-3)}.$$

Принято $T_D = 9.7$ эв, $T_{1-5} = 14.5, 29.6, 47.4, 77.5, 97.5$ эв, $\Theta = 3340$ К, $k=9$, $\rho_c = 1113$ кг/м³, $\varepsilon_c = 2.52 \cdot 10^5$ Дж/кг. При комнатных температурах и давлениях применяются выражения $p = \rho R T$, $\varepsilon = R T / (\gamma - 1)$.

Уравнения состояния воздуха получены путем небольшой модификации уравнений состояния работы [1]. Модификация проведена с целью устранения отрицательных значений в зависимости $p(\rho, T)$ работы [1] в окрестности точки $\rho = \rho_*$ при комнатных температурах T .

Уравнения состояния жидкости (воды) принимаются в форме Нигматулина-Болотновой [5], когда давление и внутренняя энергия представлены в виде суммы упругой и тепловой составляющих:

$$p(\rho, T) = p_c(\rho) + p_H(\rho, T), \quad \varepsilon(\rho, T) = \varepsilon_c(\rho) + \varepsilon_H(T),$$

где

$$p_c = A(\rho/\rho_0)^{2/3} \exp \left\{ b \left[1 - (\rho/\rho_0)^{1/3} \right] \right\} - B(\rho/\rho_0)^{4/3}, \quad p_H = \rho \Gamma \varepsilon_H,$$

$$\varepsilon_c = \frac{3A}{b\rho_0} \exp \left\{ b \left[1 - (\rho/\rho_0)^{1/3} \right] \right\} - \frac{3B}{\rho_0} (\rho/\rho_0)^{1/3}, \quad \varepsilon_H = c_v T.$$

Функция Грюнайзена $\Gamma(\rho)$ аппроксимируется зависимостью

$$\Gamma(\rho) = \Gamma_\infty + \frac{\Gamma_* + \Gamma_\infty}{1 + \Delta_*^{-2} (\bar{\rho} - \bar{\rho}_*)^2} - \frac{\Delta \Gamma_1}{1 + \Delta_0^{-2} (\bar{\rho} - 1)^2}, \quad \bar{\rho} = \rho/\rho_0$$

Константы имеют следующие значения: $c_v = 3270$ Дж/(кг·К), $\bar{\rho}_* = 1.65$, $\rho_0 = 998.2$ кг/м³, $\Gamma_\infty = 0.57$, $\Gamma_* = 1.52$, $\Delta \Gamma_1 = 0.28$, $\Delta_*^2 = 0.12$, $\Delta_0^2 = 0.07$, $A = 0.3492 \cdot 10^9$ Па, $B = 0.8283 \cdot 10^9$ Па, $b = 16.0558$.

Данная форма уравнений состояния воды удобнее для применения в расчетах, чем использованные в ряде работ уравнения состояния Rees [6].

На рис. 2, 3 дано сравнение зависимостей давления p от относительного удельного объема V/V_0 ($V = 1/\rho$) (рис. 2) и скорости распространения

ударной волны D от скорости среды за фронтом волны U (рис. 3), полученных по уравнениям состояния [5] (сплошные кривые) и [6] (пунктирные кривые). Наблюдается удовлетворительное согласование.

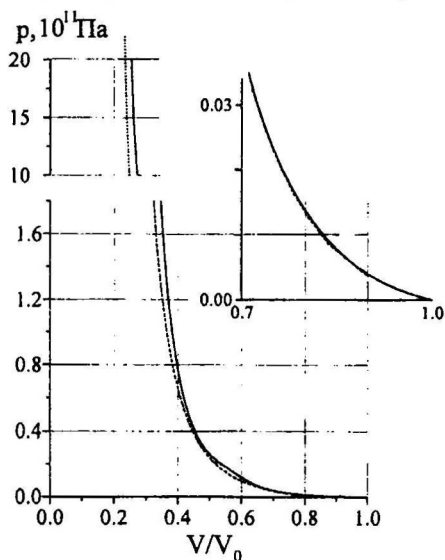


Рис. 2

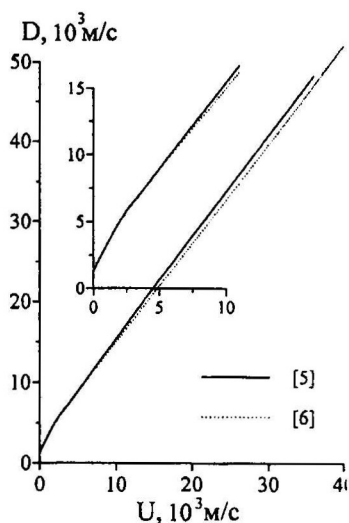


Рис. 3

При давлениях ниже p_f^0 полагается

$$p = (\Gamma - 1)\rho\epsilon + k_1^2(\rho - k_2), \quad \Gamma = 1.5, \quad k_1^2 = 2.94 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{с}^2, \quad k_2 = 749.5 \text{ кг}/\text{м}^3.$$

Приближения. В ходе относительно медленного расширения-сжатия пузырька в слое $r_b \leq r \leq r_{\text{ex}}$ можно принять $|\delta\rho_f| \sim M_{bf}^2$, где $\delta\rho_f = (\rho - \rho_f^0)/\rho_f^0$, $M_{bf} = u_b/c_f^0$. Тогда при $M_{bf}^2 < M_{bf*}^2 \ll 1$, где M_{bf*}^2 – малое число, можно вместо (2) применять следующее приближение

$$u_r + 2u r^{-1} = 0, \quad u_t + u u_r + p_r (\rho_f^0)^{-1} = 0, \quad p - p^0 = (c_f^0)^2 (\rho - \rho_f^0). \quad (3)$$

В рамках этого приближения имеем

$$-\frac{1}{r_b} Q' + \frac{u_b^2}{2} + \frac{p_b^+ - p_{\text{ex}}}{\rho_f^0} + \frac{r_b}{\rho_f^0 c_f^0} (p_b^+ - p_{\text{ex}})' = 0, \quad (4)$$

где $Q = r_b^2 u_b$, а штрих означает производную по времени.

Решение системы (3) в слое $r_b \leq r \leq r_{\text{ex}}$ имеет вид

$$u = Qr^{-2}, p = p_b^+ + \rho_f^0(r^{-1} - r_b^{-1})Q' - 0.5\rho_f^0(r^{-4} - r_b^{-4})Q^2, \rho = \rho_f^0 + (p - p^0)(c_f^0)^{-2}. \quad (5)$$

Если в жидкости используется приближение (3), то граничное условие на поверхности пузырька изменяется на $T_b^- = T^0$.

В пузырьке при $M_{bg}^2 < M_{bg*}^2 \ll 1$ ($M_{bg} = u_b/c_g^0$, M_{bg*}^2 – малое число) и $|\delta T_b| < \delta T_{b*} \ll 1$ ($\delta T_b = (T - T^0)/T^0$, δT_{b*} – малое число) можно использовать приближение, в рамках которого при $u_b < 0$ решение имеет вид

$$T = T^0 + \frac{u_b p_g^0 (r_b^2)^3 r^2 - r_b^2}{\kappa r_b^4} \frac{r^2 - r_b^2}{2}, u = \frac{u_b r}{r_b}, \rho = (\bar{\rho}_b + \Delta\rho) \frac{T^0}{T}, u_b = \frac{Q}{r_b}, \quad (6a-c)$$

$$p_b = (\bar{\rho}_b + \Delta\rho) RT^0, \Delta\rho = \bar{\rho}_b + \frac{3A}{r_b^3 C} \left(r_b - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B}{C}} \ln \left| \frac{\sqrt{B/C} + r_b}{\sqrt{B/C} - r_b} \right| \right), \quad (6d,e)$$

где

$$A = 2\kappa_b \bar{\rho}_b, B = 2\kappa_b - R\bar{\rho}_b u_b r_b^2, C = -R\bar{\rho}_b u_b, \bar{\rho}_b = \rho_g^0 (r_b^0 / r_b)^3.$$

Результаты расчетов. Ниже приводятся результаты расчетов при $\omega = 2\pi(26.5 \text{ кГц})$, $\Delta p_{ex} = 1.35 \text{ бар}$, $r_b^0 = 4.5 \text{ мкм}$, $r_{ex}^0 = 11 r_b^0$, $T^0 = 293.15 \text{ К}$, $p_g^0 = 1.32 \text{ бар}$, $p_f^0 = 1 \text{ бар}$, $\rho_f^0 = 998.52 \text{ кг/м}^3$, $\mu_f = 0.003 \text{ кг/(м·с)}$, $\kappa_f = 0.58 \text{ Вт/(м·К)}$, $\kappa_g = 0.0258 \text{ Вт/(м·К)}$, $T_f^0 = T_g^0 = T^0$, $\sigma = 0.0725 \text{ кг/с}^2$. При $0 \leq t \leq t_*$ используются приближения, а при $t > t_*$ – уравнения (2). Время t_* определяется нарушением одного из следующих условий

$$M_{bf}^2 < M_{bf*}^2, M_{bg}^2 < M_{bg*}^2, |\delta T_b| < \delta T_{b*}. \quad (7a-c)$$

В рамках приближений в газе и жидкости решение находится численным интегрированием уравнения (4) при $p_b^+ = p_b - 4\mu_f(u_b/r_b) - 2(\Sigma/r_b)$, где p_b рассчитывается по формуле (6е). Распределение параметров в газе определяется выражениями (5), а в жидкости – (6).

Численное решение системы (2) находится методом распада разрыва с применением равномерной подвижной сетки [5].

Вычислительные эксперименты показали, что удовлетворительный компромисс между точностью и экономичностью можно достигнуть при $M_{bf*}^2 = M_{bg*}^2 = 0.04$, $\delta T_{b*} = 0.05$. Эти значения применялись при расчетах.

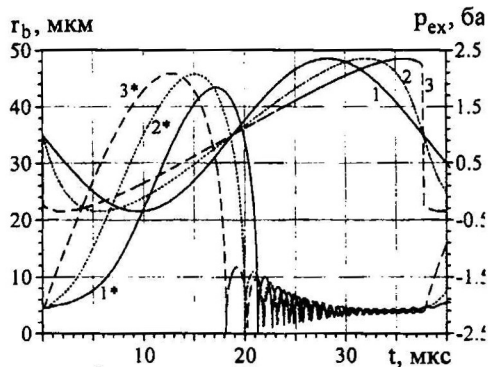


Рис. 4

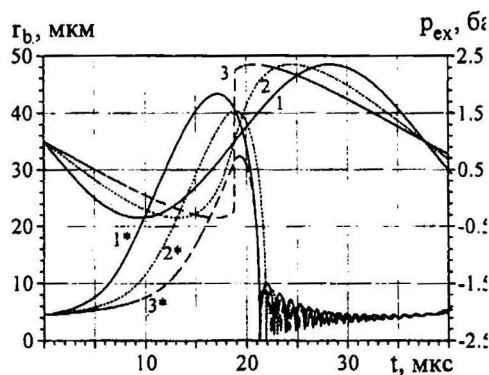


Рис. 5

На рис. 4, 5 приведены зависимости радиуса пузырька r_b (кривые 1*-3*) и внешнего давления p_{ex} (кривые 1-3) от времени t . Номера кривых 1(1*), 2(2*), 3(3*) соответствуют значениям $\tau = 0, -0.2, -0.4$ на рис. 4 и $\tau = 0, 0.2, 0.4$ на рис. 5. Сокращение размеров области перехода от максимального давления к минимальному в волне внешнего возбуждения (рис. 4) приводит к увеличению скорости роста радиуса пузырька в начале каждого следующего периода колебаний. Аналогично, сокращение размеров области перехода от минимального давления к максимальному в за-

висимости $p_{ex}(t)$ (рис. 5) влечет за собой более резкий переход радиуса пузырька через максимальное значение.

На рис. 6 приведены радиальные распределения давления p , плотности ρ , скорости u и температуры T для пяти последующих моментов времени t_{1-5} ($t_1 < t_2 < \dots < t_5$, номер кривой соответствует номеру момента времени) в финальной стадии схлопывания пузырька для случая $\tau = 0.3$. Жирная точка на кривых указывает положение поверхности пузырька. С увеличением скорости слета к центру пузырька неравномерность радиальных распределений газодинамических параметров в пузырьке увеличивается. Внутри пузырька образуется сходящаяся ударная волна. По мере распространения к центру пузырька ее интенсивность быстро нарастает. В мо-

мент ее фокусировки в центре пузырька возникает расходящаяся ударная волна. Вскоре расходящаяся ударная волна взаимодействует с поверхностью пузырька, обращая ее движение на противоположное.

Изменение формы колебаний внешнего давления в диапазоне $-0.5 \leq \tau \leq 0.5$ не вызывает каких-либо существенных отличий в ходе финальной стадии схлопывания пузырька от того, что имеет место в случае $\tau = 0.3$. Это видно из рис. 7, где представлены зависимости p , ρ и T в центре пузырька от относительного времени $t^* = t - t_c$, где t_c — время, при котором радиус пузырька принимает свое минимальное значение. Кривые 1-3 соответствуют значениям $\tau = -0.2, 0, 0.2$. Качественно они подобны друг другу. Имеется лишь небольшое количественное расхождение.

На рис. 8 приведена зависимость максимального значения радиуса пузырька r_b^{\max} от параметра τ , характеризующего изменение формы внешнего давления. С уменьшением τ до

$\tau \approx -0.3$ максимальный радиус пузырька r_b^{\max} увеличивается, а затем относительно быстро уменьшается. Следует отметить, что максимальное значение r_b^{\max} достигается не на краях рассматриваемого отрезка $-0.5 \leq \tau \leq 0.5$ и не в его середине $\tau = 0$.

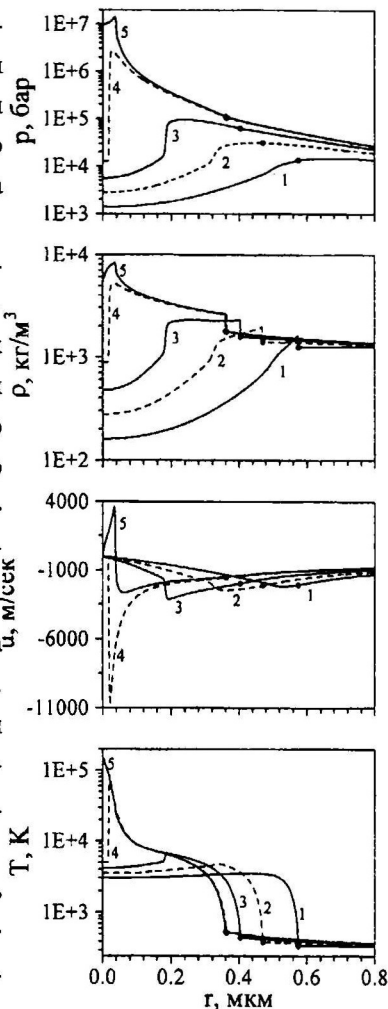


Рис. 6

Аналогичная ситуация имеет место и с максимальными значениями давления, плотности и температуры в центре пузырька в зависимостях от параметра τ (рис. 9). При этом наибольшее значение кривой температуры достигается при $\tau \approx 0.2$. Область максимума имеет ярко выраженный характер. Изменение зависимостей плотности и давления происходит несколько иначе. Две относительно узких зоны быстрого уменьшения этих

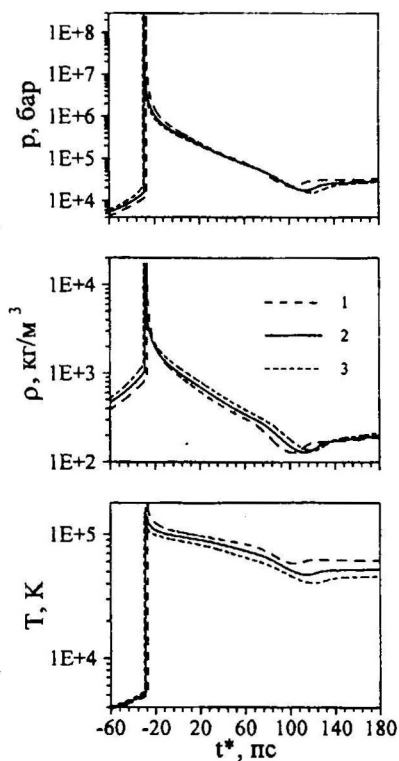


Рис. 7

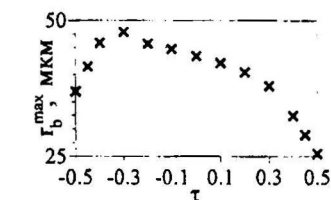


Рис. 8

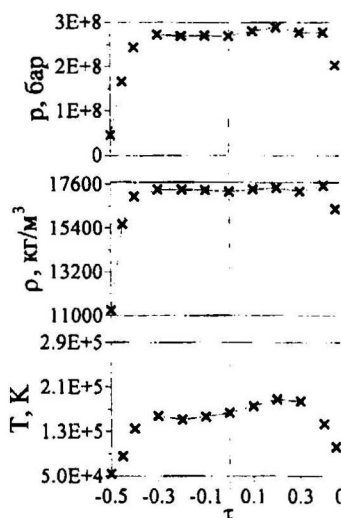


Рис. 9

параметров на краях отрезка $-0.5 \leq \tau \leq 0.5$ примыкают к довольно широкому интервалу $-0.4 < \tau < 0.4$, в котором их значения изменяются слабо.

Заключение. Рассмотрена зависимость максимальных значений давления, плотности и температуры в пузырьке и характера их достижения от формы возбуждения. Изменение формы возбуждения задается с помощью нелинейного уравнения переноса при гармоническом законе в качестве

начальных данных. За параметр, характеризующий отклонение формы возбуждения от гармонической, принята временная переменная τ нелинейного уравнения переноса. Рассмотрен интервал $-0.5 \leq \tau \leq 0.5$, в котором амплитуда колебаний не изменяется. В этом интервале $\tau=0$ соответствует гармоническому возбуждению, $\tau=\pm 0.5$ – возбуждениям с бесконечно малыми областями перехода от минимального значения к максимальному (+), и наоборот (–). Установлено, что характер изменения радиальных распределений газодинамических переменных в финальной стадии схлопывания пузырька во всем интервале $-0.5 \leq \tau \leq 0.5$ остается качественно подобным. Вместе с тем, максимальные значения радиуса пузырька и температуры в его центре достигаются не на краях интервала $-0.5 \leq \tau \leq 0.5$, и не в его середине, а при $\tau \approx -0.3$ и $\tau \approx 0.2$ соответственно. Максимальные значения давления и плотности в интервале $|\tau| < 0.4$ изменяются незначительно, а вне этого интервала с увеличением $|\tau|$ довольно быстро уменьшаются.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 99-01-00234) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект № 244).

ЛИТЕРАТУРА

1. Moss W.C. et al. *Hydrodynamic simulations of bubble collapse and picosecond sonoluminescence* //Phys. Fluids. – 1994. – V. 6. – No. 9. – P. 2979–2985.
2. Аганин А.А., Нигматулин Р.И., Ильгамов М.А., Ахатов И.Ш. *Динамика пузырька газа в центре сферического объема жидкости* //Докл. АН России. – 1999. – Т. 369. – № 2. – С. 182–185.
3. Aganin A.A. *Dynamics of a small bubble in a compressible fluid* //Int. J. Numerical Methods in Fluids. – 2000. – V. 33. – P. 157–174.
4. Аганин А.А., Ильгамов М.А. *Гидродинамическое моделирование периодических колебаний пузырька воздуха в воде* //Матем. центр им. Н.И.Лобачевского. Т. 3. Краевые задачи и их приложения. – Казань: Уни-пресс, 1999. – С. 129–135.
5. Nigmatulin R.I. et al. *Mathematical Modeling of a Single Bubble and Multi Bubble Dynamics in a Liquid* //Int. Conf. On Multiphase Systems (ICMS'2000). 2000, Ufa, Russia. – P. 294–301.
6. Ree F.H. *Equation of State of Water* //LLNL Report UCRL-52190. – 1976.